Développement : Hadamard-Lévy

La preuve est fait d'étapes qui se répondent. Elles sont toutes essentiellement constituées d'hypothèses, de définitions, puis d'un énoncé, et d'une démonstration.

Théorème .0.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2. Supposons que f soit de différentielle inversible en tout point, et propre, i.e. ses images réciproques de compacts sont compacts. Alors f est un C^1-difféomorphisme.

Preuve. **Préliminaire :** Le but est de prouver que f est bijective. Quitte à translater, le but est en fait de prouver que $S := f^{-1}(\{0\})$ est un singleton. Pour cela, on pose $X(x) = -(df_x)^{-1}(f(x))$. Ce champ de vecteurs est une fonction C^1 car f est C^2. Ainsi, il est localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable. Cela permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $T^x > 0$ tel qu'on ait $\varphi_x(t) : [0, T^x[\to \mathbb{R}^n$ telle que $\varphi_x'(t) = X(\varphi_x(t))$. [1]

Etape 1 : Si $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $g(t) = f(\varphi_x(t))$. Alors il vient $g'(t) = -g(t)$ donc on trouve $\boxed{g(t) = e^{-t} f(x)}$. Donc $\varphi_x(t) \in f^{-1}(\overline{B}(0, \|f(x)\|)$ qui est compact donc par le lemme des bouts, $\boxed{T^x = +\infty}$.

Etape 2 : (quand le flot s'approche trop d'un élément de S, il ne peut plus ressortir (« lemme du piège » si je puis me permettre)) Soit $y \in S$. On définit U_y par le TIL autour de y (l'ouvert « piège » autour de y). Plus précisément, soit U_y et V deux ouverts contenant y et 0 par le TIL appliqué à f. On peut réduire V et U_y pour que V soit une boule notée $B(0, \varepsilon)$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \geqslant 0$. $\boxed{\text{Si } \varphi_x(t_0) \in U_y, \text{ alors } \forall t \geqslant t_0,\ \varphi_x(t) \in U}$. La première remarque est de voir que $g(t_0) \in V$ donc comme c'est une boule, $\forall t \geqslant t_0, g(t) \in V$. Ainsi, pour tout $t \geqslant t_0$, $\left(f_{|U}^{|V}\right)^{-1}(g(t))$ (qui est bien défini et continu en fonction de t) est le seul antécédent de $g(t)$ par f dans U_y. Cela veut dire que $\varphi_x(t)$ (qui est aussi un antécédent de $g(t)$) est dans U_y si et seulement s'il est égal à ce seul antécédent. On a donc $\{t \geqslant t_0 \mid \varphi_x(t) \in U\} = \left\{ t \geqslant t_0 \mid \varphi_x(t) = \left(f_{|U}^{|V}\right)^{-1}(g(t)) \right\}$ qui est donc ouvert fermé et non vide dans le connexe $[t_0, +\infty[$ donc égal à ce dernier.

Etape 3 : (il suffit de s'approcher d'un élément de S pour converger vers lui. Les pièges sont en fait des maelstroms. « lemme du maelström », si je puis me permettre). Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in S$.
$\boxed{\text{S'il existe } t_0 \geqslant 0 \text{ tel que } \varphi_x(t_0) \in U, \text{ alors on a en fait } \varphi_x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y}$. En effet, $f(\varphi_x(t))$ tend vers 0 et est dans V donc quand on pullback par f, on se retrouve avec son antécédent dans U_y qui n'est autre que $\varphi_x(t)$ par le lemme précédent. Donc $\varphi_x(t)$ tend vers $\left(f_{|U}^{|V}\right)^{-1}(0) = y$.

Etape 4 : (le flot convergera toujours vers un élément de S). Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors :
$\boxed{\text{il existe } y \in S \text{ tel que } \varphi_x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y}$. En effet, la suite $(\varphi_x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ vit dans le compact $f^{-1}(\overline{B}(0, \|f(x)\|)$ alors elle admet une valeur d'adhérence y qui est a fortiori dans S car $f(\varphi_x(n))$ tend vers 0.

Conclusion : De l'étape 4 il vient instantanément : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in S} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_x(t) \to y\} := \bigcup_{y \in S} \Omega_y$, et l'union est disjointe par unicité de la limite. De plus, les Ω_y sont ouverts car s'écrivent $\bigcup_{t \geqslant 0} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_x(t) \in U_y\}$ (U_y étant l'ouvert du TIL autour de y), qui sont des images réciproques d'ouverts par une fonction continue (à t fixé) car le flot est continu.

Les Ω_y contiennent tous y car le flot qui part de y atteint U_y dès $t = 0$. Donc on a écrit un connexe comme une union disjointe d'ouverts non vides. Il n'y en avait donc qu'un depuis le début ! Donc S est un singleton. □

1. L'idée derrière ce champ est qu'en tout instant, la valeur de $f(\varphi_x(t))$ a tendance à réduire. En effet, si je me situe en $x \in \mathbb{R}^n$, alors la direction h que je vais prendre est telle que $df_x(h) = -f(x)$. Ainsi, si je me déplace le long de cette direction en gardant un oeil sur la valeur $f(x)$, celle-ci va diminuer en norme puisqu'elle varie le long du vecteur $f(x)$, dans la direction de 0.

Contactez-moi en cas de coquille s'il vous plaît ! prenom.nom@ens-lyon.fr